I - Égalité de quotients

A - Simplification de quotient

Règle

Si on multiplie ou si on divise le numérateur et le dénominateur d'un quotient par **un même nombre non nul** alors on obtient **un quotient égal**.	Pour tous nombres a, b et k où b et k sont non nuls : $\frac{a\times k}{b\times k}=\frac{a}{b}$ et $\frac{a\div k}{b\div k}=\frac{a}{b}$.

Exemple 1 : Simplifie le quotient $\frac{42}{-140}$.

$\frac{42}{-140}=-\frac{42}{140}$ ⟶ On détermine le signe du quotient.

$\frac{42}{-140}=-\frac{3\times 2\times 7}{10\times 7\times 2}$ ⟶ On cherche les facteurs communs à 42 et 140.

$\frac{42}{-140}=-\frac{3}{10}$ ⟶ On simplifie le quotient.

Exemple 2 : Détermine le nombre manquant dans l'égalité $\frac{-1,2}{6}=\frac{\ldots}{18}$.

$\frac{-1,2}{6}\overset{\times 3}{=}\frac{\ldots}{18}$ ⟶ Pour passer de 6 à 18, **on multiplie par 3**.

donc $\frac{-1,2}{6}=\frac{-3,6}{18}$ ⟶ Ainsi, pour trouver le nombre manquant, **on multiplie – 1,2 par 3**, ce qui donne – 3,6.

B - Réduction de quotients au même dénominateur

Exemple 1 : Réduis les quotients $\frac{2}{9}$ et $\frac{5}{12}$ au même dénominateur.

Multiple de 9 : 9, 18, 27, **36**, 45, 54,...

Multiple de 12 : 12, 24, **36**, 48, 60,... ⟶ On cherche un multiple commun non nul aux dénominateurs (le plus petit possible).

Un multiple commun de 9 et 12 est 36.
C'est aussi le plus petit.

$\frac{2}{9}=\frac{2\times 4}{9\times 4}=\frac{8}{36}$ et $\frac{5}{12}=\frac{5\times 3}{12\times 3}=\frac{15}{36}$ ⟶ On détermine les écritures fractionnaires ayant 36 pour dénominateur.

Exemple 2 : Compare les quotients $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$.

Les dénominateurs 7 et 8 n'ont aucun diviseur commun autre que 1.
Le plus petit multiple commun est $7\times 8=56$
Donc $\frac{2\times 8}{7\times 8}=\frac{16}{56}$ et $\frac{3\times 7}{8\times 7}=\frac{21}{56}$.
Or $\frac{16}{56}<\frac{21}{56}$ donc $\frac{2}{7}<\frac{3}{8}$.

C - Produit en croix

Propriétés

- Si deux nombres en écriture fractionnaire sont égaux alors leurs produits en croix sont égaux.
- **Réciproquement**, **si** les produits en croix de deux nombres en écriture fractionnaire sont égaux **alors** ces deux nombres sont égaux.

Pour tous nombres a, b, c et d où b et d sont non nuls :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $a \times d = b \times c$.

Remarque : En particulier, pour démontrer que deux nombres en écriture fractionnaire ne sont pas égaux, il suffit de démontrer que leurs produits en croix ne sont pas égaux.

Exemple 1 : Les nombres $\frac{2,1}{3,5}$ et $\frac{4,1}{6,9}$ sont-ils égaux ? Justifie.

$2,1 \times 6,9 = 14,49$ et $3,5 \times 4,1 = 14,35$ ⟶ On calcule les produits en croix.

$14,49 \neq 14,35$ ⟶ On les compare.

donc $\frac{2,1}{3,5} \neq \frac{4,1}{6,9}$ ⟶ Les **produits en croix ne sont pas égaux** donc **les nombres ne sont pas égaux**.

Exemple 2 : Détermine le nombre manquant dans l'égalité $\frac{-1,2}{6} = \frac{\ldots}{7}$.

$-1,2 \times 7 = 6 \times x$

donc $-8,4 = 6 \times x$ ⟶ On appelle x le nombre manquant. On écrit l'égalité des produits en croix.

$x = -\frac{8,4}{6} = -1,4$ ⟶ On trouve le nombre manquant.

II - Addition ou soustraction

Règle

Pour **additionner (ou soustraire)** des nombres en écriture fractionnaire **ayant le même dénominateur**, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

Pour tous nombres a, b et c où b est non nul :

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

Remarque : Si les nombres en écriture fractionnaire n'ont pas le même dénominateur, il faut les réduire au même dénominateur.

Exemple : Calcule l'expression $A = -1 + \frac{13}{30} - \frac{-11}{12}$.

Multiples de 30 : 30 ; 60 ; 90 ; 120 ...
Multiples de 12 : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ... ⟶ On cherche le plus petit multiple commun non nul à 30 et 12.

$A = \frac{-1 \times 60}{1 \times 60} + \frac{13 \times 2}{30 \times 2} + \frac{11 \times 5}{12 \times 5}$ ⟶ On détermine le signe de chaque quotient et on réduit les quotients au même dénominateur 60.

$A = \frac{-60}{60} + \frac{26}{60} + \frac{55}{60} = \frac{-60+26+55}{60}$ ⟶ On additionne les numérateurs et on garde le dénominateur.

$A = \frac{21}{60} = \frac{7 \times \mathbf{3}}{20 \times \mathbf{3}} = \frac{7}{20}$ ⟶ On simplifie si possible.

III - Multiplication

Règle

Pour **multiplier des nombres en écriture fractionnaire**, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.	Pour tous nombres a, b, c et d où b et d sont non nuls : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

Remarque : Si $b = 1$, la formule devient $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$.

Exemple : Calcule l'expression $B = -\frac{35}{33} \times \frac{-39}{-80}$.
Donne le résultat sous forme simplifiée.

$B = -\frac{35 \times 39}{33 \times 80}$	⟶ On détermine le signe du résultat.
$B = -\frac{7 \times 5 \times 13 \times 3}{11 \times 3 \times 2 \times 5 \times 8}$	⟶ On cherche des facteurs communs.
$B = -\frac{7 \times 13}{11 \times 2 \times 8}$	⟶ On simplifie.
$B = -\frac{91}{176}$	⟶ On calcule.

IV - Division de deux quotients

A - Inverse d'un nombre non nul

Définition

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Propriétés

- Tout nombre x non nul admet un inverse (noté x^{-1}) qui est le nombre $\frac{1}{x}$.
- Tout nombre en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) admet un inverse qui est le nombre $\frac{b}{a}$.

Remarques :

- Un nombre et son inverse ont toujours le même signe.

  En effet, leur produit 1 est positif et seul le produit de deux nombres de même signe est positif.

- Zéro est le seul nombre qui n'admet pas d'inverse.

  En effet, tout nombre multiplié par 0 donne 0 et ne donnera jamais 1.

Exemple : Quels sont les inverses des nombres 3 et $\frac{-7}{3}$?

L'inverse de 3 est $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

L'inverse de $\frac{-7}{3}$ est $\left(\frac{-7}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{-7}{3}} = \frac{3}{-7} = \frac{-3}{7}$.

B - Diviser des quotients

Règle

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par l'inverse de ce nombre.	Pour tous nombres a, b, c et d où b, c et d sont non nuls : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ ou $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Exemple 1 : Calcule $C = \frac{-8}{7} \div \frac{5}{-3}$.

$C = +\left(\frac{8}{7} \div \frac{5}{3}\right)$ ⟶ On détermine le signe du résultat.

$C = \frac{8}{7} \times \frac{3}{5}$ ⟶ On multiplie par l'inverse du deuxième quotient.

$C = \frac{8 \times 3}{7 \times 5}$ ⟶ On multiplie les fractions.

$C = \frac{24}{35}$ ⟶ On calcule.

Exemple 2 : Calcule $D = \frac{-\frac{32}{21}}{\frac{-48}{-35}}$ et donne le résultat en le simplifiant le plus possible.

$D = -\frac{\frac{32}{21}}{\frac{48}{35}}$ ⟶ On détermine le signe du résultat.

$D = -\frac{32}{21} \times \frac{35}{48}$ ⟶ On multiplie par l'inverse du deuxième quotient.

$D = -\frac{8 \times 2 \times 2 \times 7 \times 5}{7 \times 3 \times 3 \times 2 \times 8}$ ⟶ On cherche des facteurs communs.

$D = -\frac{10}{9}$ ⟶ On calcule sans oublier de simplifier avant !

Exemple 3 : Quelle est la nature du nombre E défini par $E = \dfrac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}$?

$E = \dfrac{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{3}-\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}$ ⟶ E peut s'écrire aussi $E = \left(1+\frac{2}{3}\right) \div \left(1-\frac{2}{3}\right)$.
On commence donc par calculer les parenthèses.

$E = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{3}{1}$ ⟶ On multiplie par l'inverse du deuxième quotient.

$E = \dfrac{5 \times \mathbf{3}}{\mathbf{3} \times 1}$ ⟶ On cherche des facteurs communs.

E = 5 donc E est un nombre entier.